Colegiul Naţional Gheorghe Şincai, Baia Mare

Concursul interjudeţean de matematică ARGUMENT

Ediţia a 14-a, Ianuarie 2025

Soluţii - Clasa a 10-a

Problema 1. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ fixat.

a) Arătaţi că ecuaţia $z^{n+1} + z^n - 1 = 0$ nu are soluţii complexe de modul 1.
b) Determinaţi soluţiile complexe de modul 1 ale ecuaţiei $z^{n+1} + z^n + 1 = 0$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie. a) Presupunem că există $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$ pentru care $z^{n+1} + z^n = 1$. Conjugând relaţia, avem $\frac{1}{z^{n+1}} + \frac{1}{z^n} = 1$ sau $1 + z = z^{n+1}$. Atunci relaţia dată se scrie $z^n + z = 0$, deci $z^{n-1} = -1$. Revenind în relaţia iniţială, avem $-z^2 - z = 1$ sau $z^2 + z + 1 = 0$. Atunci $z^3 = 1$, deci $z^{3(n-1)} = 1$. Dar $z^{n-1} = -1$ implică $z^{3(n-1)} = -1$, contradicţie.

b) Conjugând relaţia dată obţinem $\frac{1}{z^{n+1}} + \frac{1}{z^n} + 1 = 0$ sau $1 + z + z^{n+1} = 0$. Atunci avem $z^n = z$, deci $z^{n-1} = 1$. Relaţia dată se scrie atunci $z^2 + z + 1 = 0$, deci $z^3 = 1$. Dacă $(n-1, 3) = 1$, atunci am avea $z = 1$ care nu verifică. Aşadar $3|n-1$. Obţinem în acest caz soluţiile ε şi ε^2, unde ε este rădăcina primitivă de ordin 3 a unităţii. Evident, acestea verifică.

Problema 2. Două mobile se deplasează rectiliniu şi uniform, cu viteze egale, pe două drepte distincte şi concurente. Arătaţi că există în planul dreptelor un punct A astfel încât distanţele de la A la cele două mobile să fie la orice moment egale.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie. Fie z_1 şi z_2 poziţiile iniţiale ale mobilelor. Atunci, la momentul $t \geq 0$, poziţiile acestora vor fi $z_1(t) = z_1 + v_1 \cdot t$ şi $z_2(t) = z_2 + v_2 \cdot t$, unde $|v_1| = |v_2|$.

Alegem punctul A la intersecţia mediatoarelor segmentelor $Z_1(0)Z_2(0)$ şi $Z_1(1)Z_2(1)$ şi arătăm că acesta se află pe mediatoarea segmentului $Z_1(t)Z_2(t)$, pentru orice $t \geq 0$, demonstrând cerinţa.

Pentru că A este pe mediatoarea lui $Z_1(0)Z_2(0)$, avem $|a - z_1| = |a - z_2|$, iar pentru că A este pe mediatoarea lui $Z_1(1)Z_2(1)$, avem $|a - z_1 - v_1| = |a - z_2 - v_2|$.

Fie $x = a - z_1, y = a - z_2$. Atunci avem $|x| = |y|$ şi $|x - v_1| = |y - v_2|$, adică $|x - v_1|^2 = |y - v_2|^2$, sau $(x - v_1)(\overline{x} - \overline{v_1}) = (y - v_2)(\overline{y} - \overline{v_2})$, de unde $|x|^2 - x\overline{v_1} - v_1\overline{x} + |v_1|^2 = |y|^2 - y\overline{v_2} - v_2\overline{y} + |v_2|^2$. Atunci, avem $x\overline{v_1} + v_1\overline{x} = y\overline{v_2} + v_2\overline{y}$ (1).

În final, pentru a arăta că A se află pe mediatoarea lui $Z_1(t)Z_2(t)$, pentru orice $t \geq 0$, trebuie să arătăm că $|a - z_1 - tv_1| = |a - z_2 - tv_2|$, care este echivalent cu $|x - tv_1| = |y - tv_2|$. Printr-un calcul similar cu cel de mai sus, această relaţie este echivalentă cu $t(x\overline{v_1} + v_1\overline{x}) = t(y\overline{v_2} + v_2\overline{y})$, care este echivalentă cu (1).

Problema 3. Fie $n \geq 3$ şi mulţimile nevide şi finite de numere reale $A_1, A_2, \ldots, A_n$, disjuncte două câte două.

a) Determinaţi numărul mulţimilor $A \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ pentru care $A \cap A_i \neq \emptyset$ şi $A_i \setminus A \neq \emptyset$, pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$.
b) Fie funcţia $f : A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \to \mathbb{N}$, unde $f(a)$ este numărul de submulţimi A cu proprietatea de la a) pentru care $a \in A$. Arătaţi că f este constantă.

Cristi Săvescu, Cluj Napoca

Soluţie. a) Întrucât $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt disjuncte două câte două, orice mulţime $A \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ se scrie sub forma $A = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$, unde $B_k \subseteq A_k$, pentru fiecare $k = 1, 2, \ldots, n$, şi este unic determinată de aceste restricţii ale sale la mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Condiţiile date ne indică faptul că $B_k \neq \emptyset$ şi $B_k \neq A_k$, pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$ şi reciproc, orice sistem de astfel de submulţimi verifică. Mulţimea B_k poate fi aleasă în $2^{|A_k|} - 2$ moduri (toate submulţimile lui A_k exceptând A_k şi $\emptyset$), deci A se poate alege în $N = (2^{|A_1|} - 2)(2^{|A_2|} - 2) \ldots (2^{|A_n|} - 2)$ moduri.

b) Fie $a \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ şi A_k mulţimea pentru care $a \in A_k$. Atunci mulţimile A cu proprietatea de la a), pentru care $a \in A$ sunt determinate de componentele $B_k \subseteq A_k$, unde $k = 1, 2, \ldots, n$. Mulţimile $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, B_{k+1}, \ldots, B_n$ pot fi alese conform modalităţii prezentate la a). Mulţimea $B_k = \{a\} \cup C$, unde $C \subset A_k \setminus \{a\}$ poate fi aleasă oarecare diferită de $A_k \setminus \{a\}$, deci în $2^{|A_k|-1} - 1$ moduri. Atunci, $f(a) = \frac{1}{2} \cdot N$.

Problema 4. Pentru funcţiile $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definim funcţiile $m, M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ prin

$$m(x) = \min\{f(x), g(x)\} \text{ şi } M(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{N}.$$

a) Dacă m este injectivă şi M este surjectivă, arătaţi că f şi g sunt bijective.
b) Rămâne rezultatul de la a) valabil dacă m este sujectivă şi M injectivă ?

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie. a) Deoarece M este surjectivă există $x_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$M(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0) = 0.$$

Analog există $x_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $M(x_1) = 1$. Dacă $f(x_1) = 1$ şi $g(x_1) = 0$ sau $f(x_1) = 0$ şi $g(x_1) = 1$ rezultă

$$m(x_1) = 0 = m(x_0),$$

contradicţie cu ipoteza injectivităţii funcţiei m. Rămâne că $f(x_1) = g(x_1) = 1$. Prin inducţie arătăm că dacă $M(x_k) = k$ atunci $f(x_k) = g(x_k) = k$.

Fie $x_{k+1} \in \mathbb{N}$ astfel ca $M(x_{k+1}) = k+1$. Dacă $m(x_{k+1}) < k+1$, fie $m(x_{k+1}) = p < k+1$, deci $m(x_{k+1}) = m(x_p)$ şi din injectivitatea funcţiei m rezultă $x_{k+1} = x_p$ deci

$$M(x_{k+1}) = M(x_p) \Leftrightarrow k+1 = p \text{ fals.}$$

În concluzie $m(x_{k+1}) = k+1 = M(x_{k+1})$, adică $f(x_{k+1}) = g(x_{k+1}) = k+1$.

Aşadar $f = g = m = M$, deci f şi g sunt simultan injective şi surjective, deci bijective.

b) Există funcţii f, g nici una bijectivă astfel ca m să fie surjectivă şi M injectivă, de exemplu $f(x) = 2x,\ x \in \mathbb{N},\ g(x) = \left[\frac{x}{2}\right],\ x \in \mathbb{N}$, pentru care

$$M(x) = 2x,\ x \in \mathbb{N} \text{ (injectivă)}$$

$$m(x) = \left[\frac{x}{2}\right],\ x \in \mathbb{N} \text{ (surjectivă).}$$