Colegiul Naţional Gheorghe Şincai, Baia Mare

Concursul interjudeţean de matematică ARGUMENT

Ediţia a 14-a, Ianuarie 2025

Soluţii - Clasa a 11-a

Problema 1. Fie $\mathcal{P}$ un poligon în plan. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm o reţea infinită de pătrate de latură n^{-1} iar dintre toate mulţimile de astfel de pătrate care acoperă în totalitate poligonul $\mathcal{P}$ şi interiorul său, alegem una de cardinal minim A_n şi notăm cu a_n suma ariilor pătratelor din A_n.

Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent iar limita sa este aria poligonului $\mathcal{P}$.

Cristi Săvescu, Cluj Napoca

Soluţie. Pentru fiecare $n \geq 2$ considerăm un poligon $\mathcal{Q}_n$ asemenea cu $\mathcal{P}$ care îl conţine pe $\mathcal{P}$ în interior şi are laturile paralele cu ale lui $\mathcal{P}$, iar distanţa dintre laturile corespondente ale lui $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{Q}_n$ este $\frac{\sqrt{2}}{n}$.

Atunci, din definiţia mulţimii A_n, observăm că aceasta este inclusă în interiorul poligonului $\mathcal{Q}_n$, deci $[\mathcal{P}] \leq a_n < [\mathcal{Q}_n]$.

Fie p perimetrul lui $\mathcal{P}$ şi m numărul de vârfuri al acestuia. Observăm că suprafaţa lui $\mathcal{Q}_n$ este compusă din suprafaţa lui $\mathcal{P}$ plus o bordură de grosime $\frac{\sqrt{2}}{n}$ externă perimetrului lui $\mathcal{P}$. Aceasta are aria formată din dreptunghiurile de lăţime $\frac{\sqrt{2}}{n}$ formate în exterior pe laturi şi m sectoare de cerc de rază $\frac{\sqrt{2}}{n}$ centrate în vârfurile lui $\mathcal{P}$.

Atunci $[\mathcal{Q}_n] < [\mathcal{P}] + \frac{\sqrt{2}}{n} \cdot p + m \cdot \pi \cdot (\frac{\sqrt{2}}{n})^2$, deci $[\mathcal{P}] \leq a_n < [\mathcal{P}] + \frac{\sqrt{2}}{n} \cdot p + m \cdot \pi \cdot (\frac{\sqrt{2}}{n})^2$. Concluzia rezultă din criteriul cleştelui.

Problema 2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, unde $n \geq 2$, cu proprietatea că $A^2 = A, B^2 = B$ şi $AB = BA$. Dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $(A - B)^k = O_n$, arătaţi că $A = B$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie. Dacă avem $k = 1$, nu avem ce demonstra. Considerăm $k \geq 2$. Avem $O_n = (A-B)^k = \sum_{t=0}^{k} C_k^t \cdot (-B)^t \cdot A^{k-t} = A^k + (-B)^k + \sum_{t=1}^{k-1} C_k^t \cdot (-B)^t \cdot A^{k-t} = A + (-1)^k \cdot B + AB \cdot \sum_{t=1}^{k-1} C_k^t \cdot (-1)^t = A + (-1)^k \cdot B + AB \cdot \left(\sum_{t=0}^{k} C_k^t \cdot (-1)^t - 1 - (-1)^k \right) = A + (-1)^k \cdot B + AB[(1-1)^k - 1 + (-1)^{k+1}] = A + (-1)^k \cdot B + AB[(-1)^{k+1} - 1]$.

Înmulţim la dreapta cu B şi avem $O_n = AB + (-1)^k \cdot B + AB[(-1)^{k+1} - 1]$, deci $AB = A$. Atunci $(-1)^{k+1} \cdot A + (-1)^k \cdot B = O_n$, de unde rezulă concluzia.

Problema 3. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{2} & x < -1 \\ 2x & x \in [-1, 1] \\ \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2} & x > 1 \end{cases}$$

Studiaţi monotonia, convergenţa şi limita şirului $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin relaţia de recurenţă $x_{n+1} = f(x_n)$, pentru orice $n \geq 1$, în funcţie de valoarea lui $x_0 \in \mathbb{R}$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie. Funcţia f este impară, aşadar este suficient să studiem cazul $x_0 = a \geq 0$.

Dacă $a = 0$, atunci şirul $(x_n)_n$ este constant, deci monoton şi convergent la 0.

Dacă $a = 3$, atunci $f(a) = a$. Şirul $(x_n)_n$ este constant, deci monoton şi convergent la 3.

Dacă $a \in (0, 3)$, atunci $f(a) > a$, deci şirul $(x_n)_n$ este strict crescător şi avem $f(a) \in (0, 3)$, deci şirul este mărginit. Atunci acesta este convergent la L şi avem $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(L)$. Cum $L > 0$, deducem că $L = 3$.

Dacă $a > 3$, atunci $f(a) > 3$ şi $f(a) < a$. Rezultă că şirul $(x_n)_n$ este descrescător, mărginit şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

În concluzie, pentru $a \in \{-3, 0, 3\}$ şirul este constant. Pentru $a \in (0, 3)$ şirul este crescător cu limita 3. Pentru $a \in (-3, 0)$, şirul este descrescător cu limita -3. Pentru $a > 3$, şirul este descrescător cu limita 3. Pentru $a < -3$, şirul este crescător cu limita -3.

Problema 4. Fie $n \geq 2$ şi numerele complexe distincte $z_1, z_2, \ldots, z_n$, toate având acelaşi modul. Determinaţi rangul matricei $A = (|z_i - z_j|)_{1\leq i,j\leq n}$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie 1. Minorul $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & |z_1 - z_2| \\ |z_1 - z_2| & 0 \end{vmatrix} = |z_1 - z_2|^2 \neq 0$, deci $\operatorname{rang}(A) \geq 2$.

Fixăm liniile L_1 şi L_2 şi arătăm că pentru orice $i \geq 3$, există $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ astfel încât $L_i = \alpha_i L_1 + \beta_i L_2$. Atunci va rezulta că $\operatorname{rang}(A) < 3$, deci $\operatorname{rang}(A) = 2$.

Dacă z_1, z_2, z_i, z_j sunt în această ordine pe cerc, aplicăm teorema lui Ptolemeu în patrulaterul inscriptibil $A_1A_2A_iA_j$ şi avem $|z_i - z_j| \cdot |z_1 - z_2| + |z_1 - z_j| \cdot |z_2 - z_i| = |z_1 - z_i| \cdot |z_2 - z_j|$, adică $a_{ij} = \frac{a_{1i}}{a_{12}} \cdot a_{2j} - \frac{a_{2i}}{a_{12}} \cdot a_{1j}$, pentru orice $j = 1, 2, \ldots, n$, unde $a_{ij} = |z_i - z_j|$, deci $L_i = \frac{a_{1i}}{a_{12}} L_2 - \frac{a_{2i}}{a_{12}} L_1$, pentru $i \geq 3$. Dacă ordinea pe cerc este z_1, z_2, z_j, z_i, în mod similar obţinem $L_i = \frac{a_{2i}}{a_{12}} L_1 - \frac{a_{1i}}{a_{12}} L_1$, pentru $i \geq 3$.

Soluţie 2. Fie $z_k = R(\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k)$, pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$, notate astfel încât $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < 2\pi$.

Atunci $a_{ij} = R\sqrt{(\cos \alpha_i - \cos \alpha_j)^2 + (\sin \alpha_i - \sin \alpha_j)^2} = 2R|\sin \frac{\alpha_i - \alpha_j}{2}| = 2R \sin \frac{\alpha_i - \alpha_j}{2}$ $= 2R(\sin \beta_j \cos \beta_i - \cos \beta_j \sin \beta_i)$, unde $\beta_i = \alpha_i/2$.

Deducem că $A = 2R \cdot \begin{pmatrix} \sin \beta_1 & \cos \beta_1 \\ \sin \beta_2 & \cos \beta_2 \\ \ldots & \\ \sin \beta_n & \cos \beta_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \ldots & \cos \beta_n \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 & \ldots & \sin \beta_n \end{pmatrix}$, de unde rezultă $\operatorname{rang}(A) \leq 2$. La fel ca în soluţia 1, avem un minor de ordin 2 nenul, deci $\operatorname{rang}(A) = 2$.