OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA
BAREM CORECTARE - ETAPA JUDEȚEANĂ
CLASA a VII-a 06.03.2026

Subiectul 1. (25 puncte)

Arătați că numerele a și b sunt raționale, unde

$a = \sqrt{101 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 200}$, iar $b = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}+\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{35}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}} - \sqrt{5}$.

Soluție:

$a = \sqrt{101 + 2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 100)} = \sqrt{101 + 100 \cdot 101} =$

$\sqrt{101^2} = 101 \in \mathbb{Q}$ ……………………………………………………………**(10p)**

$b = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{5}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7})}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7}} - \sqrt{5} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7})(1 + \sqrt{5})}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7}} - \sqrt{5} =$

$1 + \sqrt{5} - \sqrt{5} = 1 \in \mathbb{Q}$ ....**(15p)**

Subiectul 2. (25 puncte)

Triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle BAC = 90°$ și $\sphericalangle ABC = 30°$, este înscris în cercul $C(O, R)$. Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, demonstrați că $AI \equiv IO$.

Soluție:

Figura corectă……………………………………………,…………………..**(5p)**

$AO = \frac{BC}{2} = OC$, deci triunghiul AOC este isoscel.

Dar $\sphericalangle ACO = 60°$, deci triunghiul AOC este echilateral………………………..**(5p)**

I este centrul cercului înscris în triunghiul *ABC*,

deci *CI* este bisectoarea unghiului *ACO* ………………………………………**(5p)**

Triunghiul *AOC* este echilateral,

deci *CI* este mediană și înălțime în triunghiul *AOC* ……………………………**(5p)**

Dacă *M* este mijlocul laturii *AO,* rezultă că *IM* este mediană și înălțime în triunghiul *IAO*, deci triunghiul *IAO* este isoscel. Rezultă astfel că $AI \equiv IO$ …………….….**(5p)**

Subiectul 3. (20 puncte)

a) Demonstrați că $\frac{100^2}{199\cdot 201}=\frac{1}{4}\left(\frac{100}{199}+\frac{100}{201}\right)$.

b) Se consideră numărul $A=\frac{2^2}{1\cdot 3}+\frac{4^2}{3\cdot 5}+\frac{6^2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{2024^2}{2023\cdot 2025}$. Determinați partea întreagă a numărului A.

Soluție:

a) $\frac{1}{4}\left(\frac{100}{199}+\frac{100}{201}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{100\cdot 201+100\cdot 199}{199\cdot 201}=\frac{1}{4}\cdot\frac{400\cdot 100}{199\cdot 201}=\frac{100^2}{199\cdot 201}$..............................**(5p)**

b) $A=2^2\left(\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1012^2}{2023\cdot 2025}\right)$…………..……………………….**(4p)**

Folosind egalitatea de la punctul *a)* obținem

$A=2^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{7}+\cdots+\frac{1012}{2023}+\frac{1012}{2025}\right)$....................................**(4p)**

$A=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{1012\text{ termeni}}+\frac{1012}{2025}=1012+\frac{1012}{2025}$...**(4p)**

Partea întreagă a lui *A* este 1012...**(3p)**

Subiectul 4. (20 puncte)

Pe laturile *AB* și *AC* ale triunghiului ascuțitunghic *ABC* se construiesc în exterior pătratele *ABMN*, respectiv *ACPQ*, având centrele *O*, respectiv *O*'. Dacă *D* este mijlocul laturii *BC*, demonstrați că triunghiul *DOO*' este isoscel.

Soluție:

Figura corectă ……………………..………………..……………………...…….........**(5p)**

DO este linie mijlocie în ΔBNC, rezultă că $DO=\frac{NC}{2}$……………….................**(3p)**

DO' este linie mijlocie în ΔBCQ, rezultă că $DO'=\frac{BQ}{2}$………………………….**(3p)**

$\Delta NAC\equiv\Delta BAQ$ (LUL), de unde rezultă că $NC\equiv BQ$ ……………………….....**(6p)**

Rezultă că $DO\equiv DO'$, deci triunghiul *DOO'* este isoscel……………………......**(3p)**