OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA
BAREM CORECTARE – ETAPA JUDEȚEANĂ
CLASA a VIII-a 6.03.2026

Subiectul 1 (25 puncte)

a) Arătați că: $(a-1)^2(2a^2-2a+1) = 2a^4-6a^3+7a^2-4a+1,\ a \in \mathbb{Z}$

b) Dacă $A = a^5+5a$, arătați că A se divide cu 6 pentru orice număr întreg a.

c) Comparați A și B , unde $B = a^5+2a^4-6a^3+7a^2+a+1,\ a \in \mathbb{Z}$.

Soluție:

a) $(a-1)^2(2a^2-2a+1) = (a^2-2a+1)(2a^2-2a+1) = 2a^4-6a^3+7a^2-4a+1$ **5p**

b) $A = a^5+5a = a^5-a+6a = a(a^4-1)+6a = a(a-1)(a+1)(a^2+1)+6a$ **2p**

$a(a-1)(a+1) \vdots 6$ **2p**

$a(a-1)(a+1)(a^2+1) \in M_6 \Longrightarrow a(a-1)(a+1)(a^2+1)+6a \in M_6 \Longrightarrow A \vdots 6$ **1p**

c) $B-A = 2a^4-6a^3+7a^2-4a+1 = (a-1)^2(2a^2-2a+1)$ **7p**

$$\left.\begin{array}{c}(a-1)^2 \geq 0\\ 2a^2-2a+1 = (a-1)^2+a^2 \geq 0\end{array}\right\} \Longrightarrow (a-1)^2(2a^2-2a+1) \geq 0$$ **4p**

$(a-1)^2(2a^2-2a+1) \geq 0 \Longrightarrow B \geq A$ **4p**

Subiectul 2 (25 puncte)

Fie cubul ABCDA'B'C'D' cu muchia de lungime 8 cm și punctele M și N mijloacele laturilor A'D', respectiv C'D'.

a) Arătați că punctele M, N, C, A sunt coplanare.

b) Determinați aria secțiunii determinate în cub de planul (MNA).

c) Determinați cosinusul unghiului format de planele (MNA) și (ABC).

Soluție:

Desen **3p**

a) MN linie mijlocie în $\Delta A'C'D' \Longrightarrow MN \parallel A'C'$ **3p**

$$\left.\begin{array}{c}MN \parallel A'C'\\ AC \parallel A'C'\end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow M, N, C, A \text{ coplanare}$$ **4p**

b) $B'D' \cap MN = \{P\}, E = pr_{(ABC)}P, \{O\} = AC \cap BD$

Deoarece $P \in (D'DB), (D'DB) \perp (ABC) \Longrightarrow E \in DB$ **2p**

$$\left.\begin{array}{c}PE \perp (ABC)\\ EO \perp AC\\ EO, AC \subset (ABC)\end{array}\right\} \overset{T3\perp}{\Longrightarrow} PO \perp AC$$ **3p**

$PO = 6\sqrt{2}\,cm$ **3p**

$A_{MNCA} = \frac{(MN+AC)\cdot PO}{2} = 72cm^2$ **3p**

c) $$\left.\begin{array}{c}(MNC) \cap (ABC) = AC\\ PO \perp AC, PO \subset (MNC)\\ EO \perp AC, EO \subset (ABC)\end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle[(ABC),(MNC)] = \sphericalangle(POE)$$ **2p**

$cos\sphericalangle(POE) = \frac{EO}{PO} = \frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$ **2p**

„Binele ce-l faci la oarecine, ţi-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!

Subiectul 3 (20 puncte)

Triunghiul echilateral ABC de latură 12 cm are latura BC inclusă în planul α. Unghiul dintre AB și planul α este egal cu 30^0, iar proiecția punctului A pe planul α este punctul D . Determinați:

a) Distanța de la D la planul (ABC).
b) Sinusul unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (ABC) și α.

Soluție:

Desen..**2p**

a) $AD \perp \alpha \Longrightarrow pr_\alpha(AB) = BD \Longrightarrow \sphericalangle(AB,\alpha) = \sphericalangle(AB,BD) = \sphericalangle(ABD) = 30^0$..............................**2p**

$AD = 6\ cm, BD = 6\sqrt{3}\ cm$..**2p**

$$\left.\begin{matrix} AD \perp \alpha \\ Fie\ DM \perp BC \\ DM, BC \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \xRightarrow{T3\perp} AM \perp BC$$ **2p**

$$\left.\begin{matrix} DM \perp BC \\ AM \perp BC \\ Fie\ DE \perp AM \\ EM, BC \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \xRightarrow{R2T3\perp} DE \perp (ABC)$$ **2p**

$DM = 6\sqrt{2}\ cm$ **1p**

$DE = 2\sqrt{6}\ cm$ **1p**

b) $\sphericalangle[(ABC),\alpha] = \sphericalangle(AM,DM) = \sphericalangle(AMD)$...**4p**

$\sin(\sphericalangle AMD) = \frac{\sqrt{3}}{3}$...**4p**

Subiectul 4 (20 puncte)

Se consideră expresia:

$$E(x,y) = \left(\frac{x+y+1}{(2x+y)(3x+2y+1)} + \frac{x+y+3}{(3x+2y+1)(4x+3y+4)} + \frac{x+y+5}{(4x+3y+4)(5x+4y+9)}\right) : \frac{x+y+3}{5x+4y+9}$$

unde $x, y, z \in (0;+\infty)$

a) Arătați că $\frac{1}{x+y} - \frac{1}{2x+y} = \frac{x}{(x+y)(2x+y)}$, pentru orice $x, y \in (0;+\infty)$.
b) Arătați că $E(x,y) = \frac{3}{2x+y}$.

Soluție:

a) $\frac{1}{x+y} - \frac{1}{2x+y} = \frac{2x+y-x-y}{(x+y)(2x+y)} = \frac{x}{(x+y)(2x+y)}$ **7p**

b) $E(x,y) = \left(\frac{1}{2x+y} - \frac{1}{3x+2y+1} + \frac{1}{3x+2y+1} - \frac{1}{4x+3y+4} + \frac{1}{4x+3y+4} - \frac{1}{5x+4y+9}\right) : \frac{x+y+3}{5x+4y+9}$ **5p**

$E(x,y) = \left(\frac{1}{2x+y} - \frac{1}{5x+4y+9}\right) : \frac{x+y+3}{5x+4y+9}$ **3p**

$E(x,y) = \frac{3(x+y+3)}{(2x+y)(5x+4y+9)} \cdot \frac{5x+4y+9}{x+y+3}$ **3p**

$E(x,y) = \frac{3}{2x+y}$ **2p**